ASCENT Financial Technologies

KNOWLEDGE Desenvolvimento Profissional

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

Prof. Herbert Kimura

RISCO E RETORNO DE CARTEIRAS

ANÁLISE DA DIVERSIFICAÇÃO

RISCO DA CARTEIRA

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i . W_j . \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i . W_j . \sigma_i . \sigma_j . \rho_{ij} \Rightarrow \sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N} W_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} W_j W_k \sigma_{jk}$$

Caso 1

$$\sigma_{jk} = 0$$

$$W_j = \frac{1}{N}$$

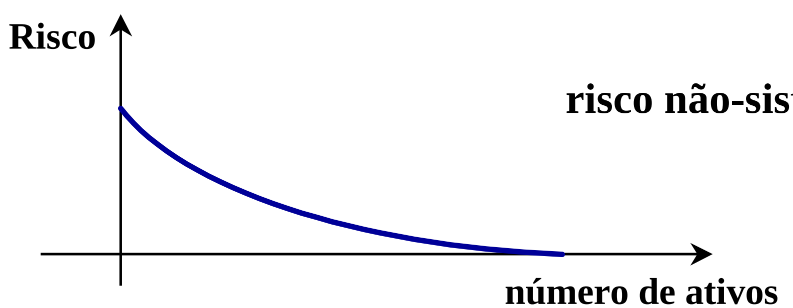
$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_j^2$$

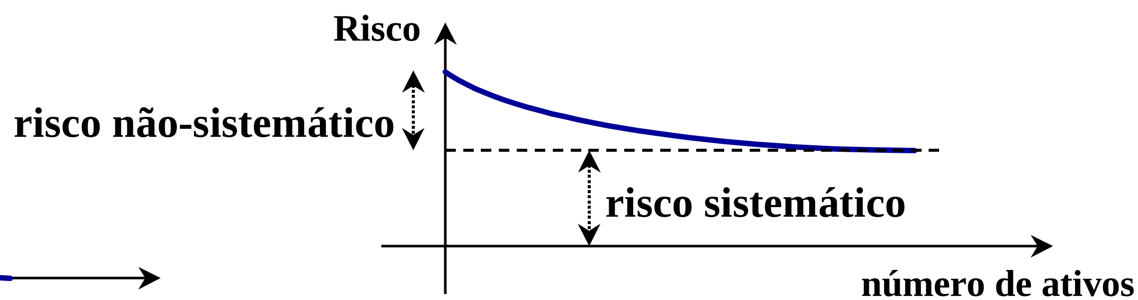
Caso 2

$$\sigma_{jk} \neq 0$$

$$W_j = \frac{1}{N}$$

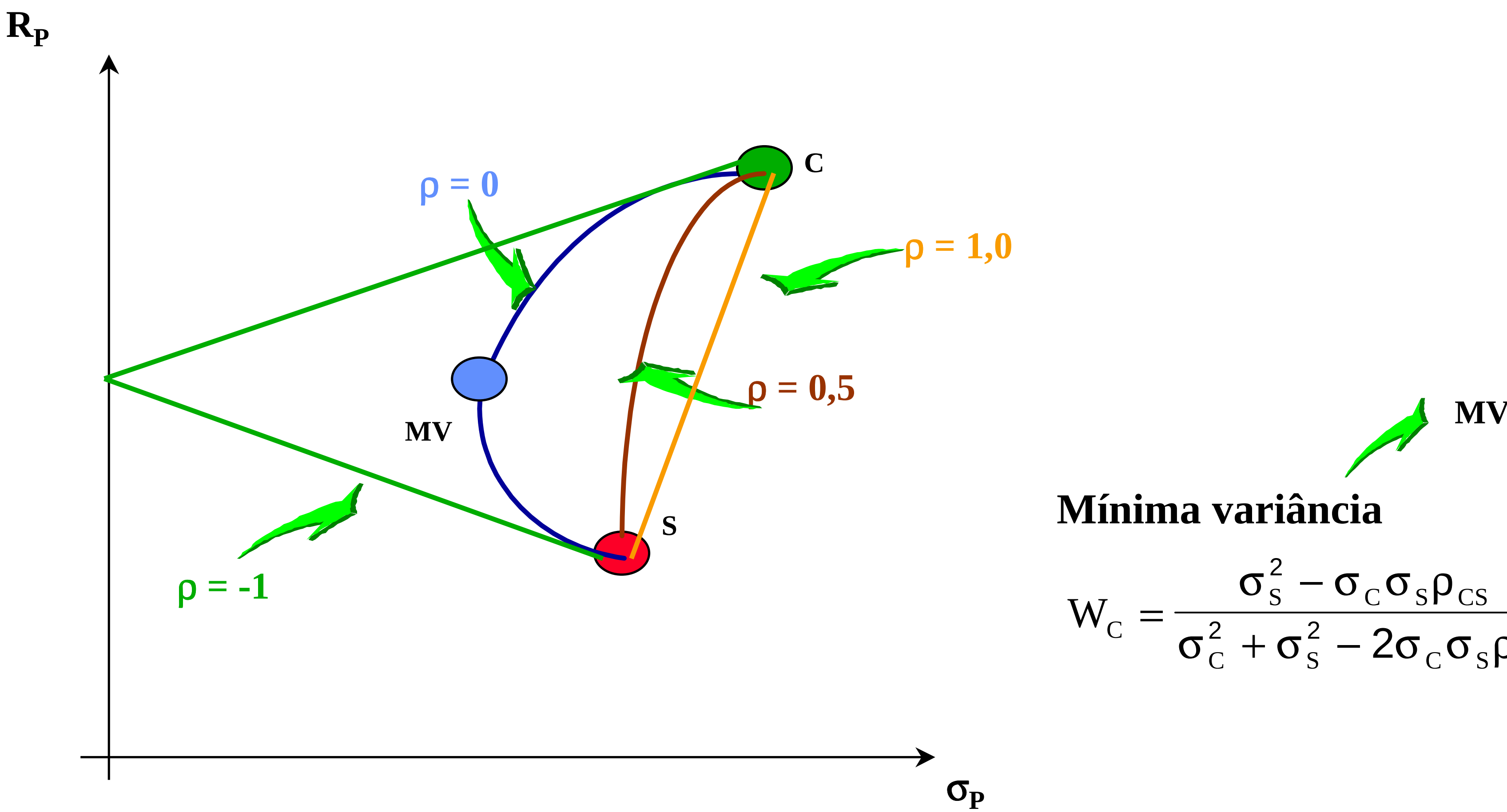
$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_j^2 + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{jk}$$





CARTEIRAS EFICIENTES

COMBINAÇÃO DE ATIVOS COM RISCO



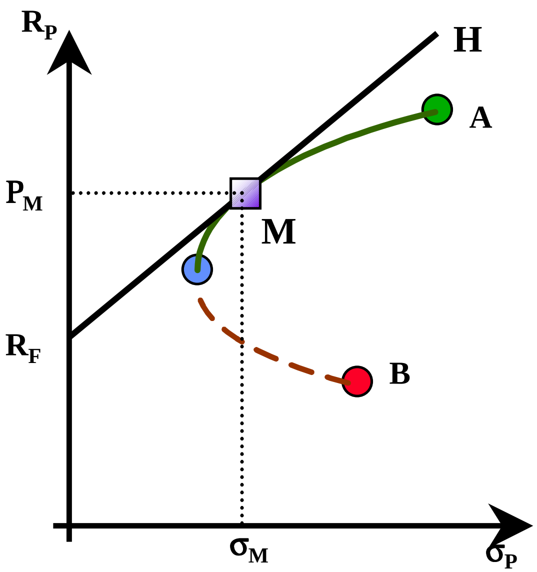
Mínima variância

$$W_C = \frac{\sigma_S^2 - \sigma_C \sigma_S \rho_{CS}}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2 - 2\sigma_C \sigma_S \rho_{CS}}$$

MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

LINHA DE MERCADO DE CAPITAIS

Fronteira eficiente
(ativos com risco e ativo livre de risco)



CML (Capital Market Line)

$$\bar{R}_C = R_F + \frac{(\bar{R}_M - R_F)}{\sigma_M}.\sigma_C$$

$$\sigma_C = W_M.\sigma_M$$

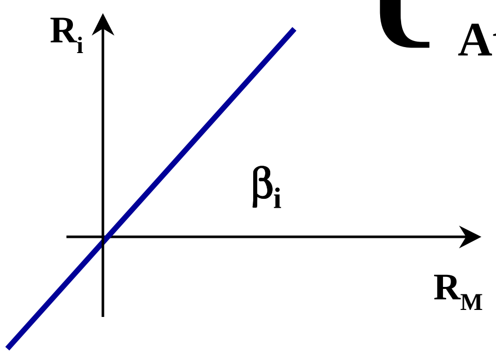
Relação de risco e retorno de carteiras eficientes

SINGLE INDEX MODEL

SIMPLIFICAÇÃO DO PROCESSO DE IMPLEMENTAÇÃO

SINGLE INDEX MODEL

Mercado → Ativo 1, Ativo 2, ..., Ativo N



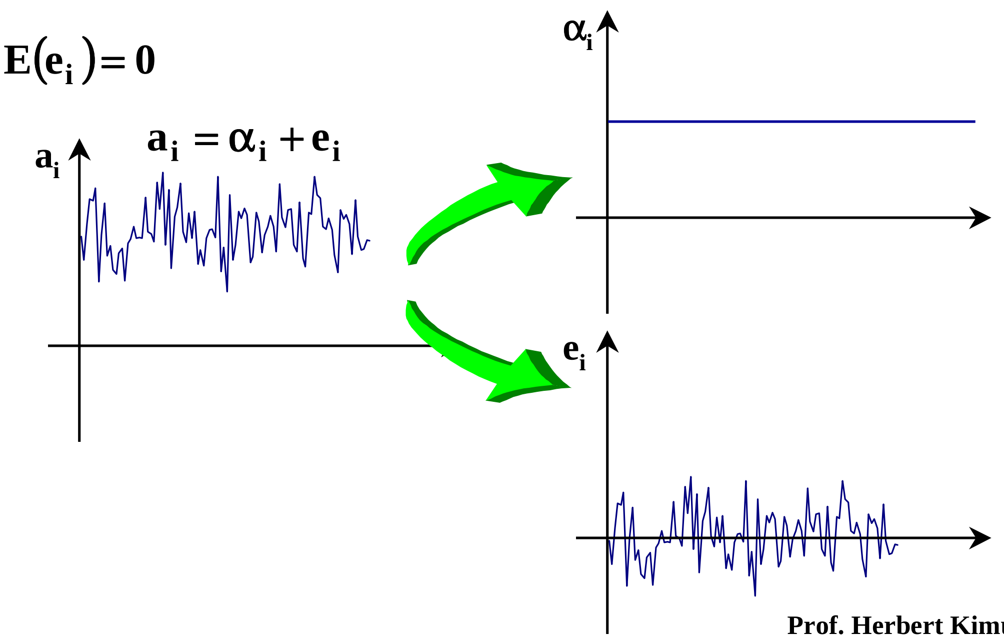
R_i: Retorno do ativo i
R_M: Retorno do índice de mercado
β_i: medida de sensibilidade do retorno do ativo i frente ao mercado

Equação básica

$$R_i = a_i + \beta_i R_M \rightarrow R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

Por construção

$$E(e_i) = 0$$



SINGLE INDEX MODEL

CARACTERÍSTICAS

X_i → Pesos dos ativos

ATIVOS INDIVIDUAIS

EQUAÇÃO BÁSICA

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

ESPERANÇA

$$\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_M$$

VARIÂNCIA

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2$$

COVARIÂNCIA

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

CARTEIRA DE ATIVOS

ESPERANÇA

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \bar{R}_M = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i + \bar{R}_M \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$$

$$\alpha_P = \sum_{i=1}^{N} W_i \alpha_i \qquad \beta_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \rightarrow \bar{R}_P = \alpha_P + \beta_P \bar{R}_M$$

VARIÂNCIA

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

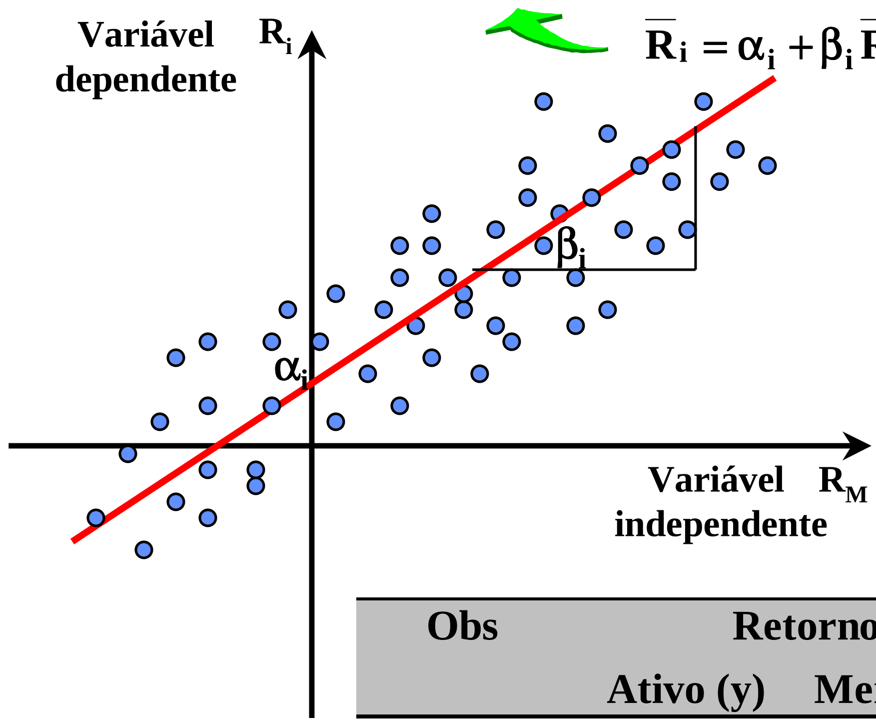
$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

SINGLE INDEX MODEL

REGRESSÃO LINEAR

Reta de regressão

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_M$$



Parâmetros da regressão

$$\beta_i = \frac{n\left(\sum xy\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum y - \beta_i \sum x}{n}$$

Exemplo

$\beta_i = 1{,}50$
$\alpha_i = 2{,}0$

Obs	Retorno		Parâmetros auxiliares		
	Ativo (y)	Mercado (x)	y^2	x^2	xy
1	10	4	100	16	40
2	3	2	9	4	6
3	15	8	225	64	120
4	9	6	81	36	54
5	3	0	9	0	0
Total	**40**	**20**	**424**	**120**	**220**

HERBERT KIMURA

Engenheiro de Eletrônica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA
Especialização em Finanças pelo Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais - IBMEC
Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística - IME/USP
Doutorando em Finanças pela Fundação Getulio Vargas - EAESP/FGV
Professor do IBMEC/SP, da EAESP/FGV e da Universidade Mackenzie
Instrutor da Knowledge Desenvolvimento Profissional

Knowledge Desenvolvimento Profissional
Rua Vergueiro, 1855 - cj. 133 - Vila Mariana
São Paulo - SP - CEP 04101-904
tel: (011) 5575-5212 / 5579-9303   fax: (0**11) 5575-7935**
www.minhacarreira.com.br   info@minhacarreira.com.br